坐标系转换公式

青岛海洋地质研究所　戴勤奋 译

(Email: qddqinfen@cgs.gov.cn)

本文译自国际石油技术软件开放公司（http://www.posc.org**）文献** "Coordinate Conversions and Transformations including Formulas" part 2 —"Formulas for Coordinate Operations other than Map Projections"。**原文献由** EPSG（**欧洲石油勘探组织）编写，初稿时间** 1995，**最新更新时间** 2004 **年** 1 **月。世界各国参考椭球体参数及基准面转换参数，可参考**（http://www.globalsecurity.org/military/library/policy/army/fm/6-2/appe2.htm#tabe_22）。

1．前言

坐标系转换问题在工作中经常会遇到，例如，在陆地和海洋的地震勘探中，当今最便捷的定位方法是 GPS **卫星定位，可是** GPS **定位数据是** WGS84 **坐标系上的数据，而各国采用的往往是早先建立的国家坐标系，为了避免出现矛盾，就需要将** WGS84 **定位数据转换到国家坐标系上。**

如果将实测定位坐标或说原大地坐标用 XYZ **直角坐标（地心坐标系）来表示，而不是用经纬度，那么坐标系转换就会容易得多。然而，欲获取地球表面任一点的** XYZ **值，必须已知该点相对大地坐标系椭球面的高度，当然你可以假设该点位于椭球面上，高度为零，但这种情况在实际中很少见。因此，必须考虑坐标点的高度，且记：是相对椭球面的高度。坐标点相对** WGS84 **椭球面的高度可以通过** GPS **测量得到，但相对其它大地坐标系椭球面的高度却不容易直接得到。大地测量获取的通常是与重力相关的高度值，也就是相对国家高程基准的高度，高程基准是特定海区的平均海平面，由长期观测数据的综合推算而得，采用传统方法联测建立的水准点都是以该大地水准面为基准的。因此，如果大地水准面相对椭球面的高度已知，坐标点相对椭球面的高度就不难得到了。可是在全球大部分地区，大地水准面相对椭球面的高度数据往往精度不足。不过全球、及全球部分地区与国家已经建立了大地水准面的数学模型，随着卫星和地面重力数据的不断积累，大地水准面模型的精度正在不断提高。通过高精度大地水准面数据，就可将实测高程转换成相对椭球面的高度，实现坐标系的转换。**

不过，如无法得到坐标点相对椭球面的高度，可以假设高度值为零，一般不会导致水平坐标值产生太大的偏差。

在卫星探测早期阶段，由于大地坐标系之间的关系还未能明确定义，并且数据本身的精度也不高，通常采用 dX，dY，dZ（**两椭球参心差值）三参数法进行坐标系转换。该方法假定两个大地坐标系的直角坐标轴相互平行，当然这种假设通常是不成立的。对一个国家或地域的局部地区来说，该假设引起的误差可以忽略，一般小于数据的观测精度。然而，随着数据的不断积累、认知的不断深入及探测方法精度的不断提高，人们逐渐发现，当精度要求较高时，三参数转换法既不适合在全球范围应用，也不适合地域广大的国家与地区应用。**

对石油勘探而言，在特定的勘探许可区内，三参数转换法也许完全能满足精度要求，但并不能由此假定此区块的转换参数就一定适合邻近地区。

最简单的坐标系转换方法就是上述三参数法，通过两坐标系的原点位移实现，莫洛金斯

基（Molodenski）提出了相应三参数的直接转换方法。方法假定原坐标系与新坐标系的坐标轴相互平行，正如前面已提到的，该假设不一定成立，由此得到的转换结果只能达到中等精度，对范围大的区域尤其如此。

赫尔默特（Helmert）7 参数转换法提高了转换精度。由于三个旋转参数有两种相反的符号协定，EPSG（欧洲石油勘探组织）将其分为两种不同的转换方法，其一称位置矢量法，另一称坐标框架法，其中位置矢量法也称布尔莎-沃尔夫（Bursa-Wolf）转换法。赫尔默特方法的关键在于转换参数的符号要与遵循的约定一致。鉴于赫尔默特方法的平移和旋转参数之间具有很强的相关性，有碍于实际应用，莫洛金斯基-巴德克斯（Molodenski-Badekas）提出了改进的赫尔默特 7 参数转换法，避免了上述相关性问题。

根据研究区内一系列已知点的大地坐标或网格坐标改正量进行插值，也是一种坐标系转换方法。北美 1927 基准面（基于 Clarke 1966 椭球体）与北美 1983 基准面（基于 GRS 1980 椭球体）之间的坐标系转换就是其中一例。北美测量控制网是用传统大地测量方法建立的，由于早期的仪器精度不足、网平差不完善等因素，基于 Clarke 1966 椭球体、并且只有一个基准点（位于堪萨斯州 Meades Ranch）的老坐标网精度低、且误差分布不均匀；新坐标网采用了卫星技术、现代先进的测量仪器和电子计算机技术，其精确度与可靠性完全能得到保障。由此造成北美大陆网内，不同地区、甚至不同位置点的转换参数都有可能不一致，所以如仅采用莫洛金斯基（Molodenski）和赫尔默特（Helmert）方法对付上述新、旧坐标系的转换显然不合适，为此需要用到 EPSG（欧洲石油勘探组织）所谓的“双线性插值”转换技术。到北美 NAD83 的坐标转换就是通过格网双线性插值实现的，其中采用了美国海岸带与大地测绘局（US Coast & Geodetic Survey）的 NADCON 控制点网。注：美国以西经为正，而 EPSG 文献中 NAD27 与 NAD83 坐标系的设定均以东经为正；加拿大的网格文件格式也被澳大利亚与新西兰采用；英国采用北向与东向的双线性网格插值。

此外，经纬度多项式也可以用于坐标系转换，挪威在海岸带调查中，就采用这种方法进行新（ED87—欧洲 1987 基准面）、旧（ED50—欧洲 1950 基准面）坐标系之间的转换。挪威地调局 Statens Kartwerk 发表的文献中列出了包含 15 个系数的经纬度 4 次多项式展开公式。

上述格网插值及多项式拟合方法更适合于早期基准面与新建基准面之间的坐标值转换。

坐标系转换时，选择正确的转换参数符号非常重要，转换前应该明确转换的“从（From）”……“到（To）” ……，避免符号混淆。

2．坐标变换方法

2.1 大地坐标与地心坐标的变换

大地经纬度坐标（纬度 j ，经度 l ）可以用地心直角坐标 X、Y、Z 表示，其中，直角坐标系原点位于地心；Z 轴为极轴，向北为正；X 轴穿过本初子午线与赤道的交点；Y 轴穿过赤道与东经 90 ° 的交点。

本文设定坐标系的零经线为格林威治子午线，如果定义不一致，在使用各公式前首先将

零经线转换到格林威治子午线。

设椭球长半轴为 a ，短半轴为 b ，扁率倒数为 1/f ，那么

$$X = (n + h)\cos j \cos l$$
$$Y = (n + h)\cos j \sin l$$
$$Z = ((1 - e^2)n + h)\sin j$$

式中：n 为纬度 j 处的卯酉圈曲率半径，$n = a/(1 - e^2 \sin^2 j)^{0.5}$

j 和 l 分别为坐标点的纬度和经度，

h 为相对椭球面的高度，

e 为椭球第一偏心率，$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2 = 2f - f^2$

（注意：h 为相对椭球面的高度，也就是通过 GPS 卫星定位就可观测到的高度值，而不是通常的与重力相关的大地测量高程值。重力相关的高程(H)通常是相对海平面，或某一水准面的高度。如果重力高程 H 已知，那么在使用以上公式时必须将其转换成椭球高程 h。h = H + N，其中 N 为大地水准面相对椭球面的高度，N 有时为负值。大地水准面是近视于海平面的重力面。WGS84 椭球的 N 值在 -100 米（斯里兰卡）到 +60（北大西洋）之间。不过国家坐标系的椭球面与大地水准面的相对高度一般不容易得到。）

反之，X、Y、Z 地心直角坐标也可以转换成经纬度大地坐标：

$$j = tg^{-1}[(Z + e^2 n \sin j)/(X^2 + Y^2)^{0.5}]$$ 通过迭代计算
$$l = tg^{-1}(Y/X)$$
$$h = X \sec l \sec j - n$$

式中 l 从格林威治本初子午线起算。

实例请见 3.2。

3．坐标系转换方法

3.1 偏移量

数学上，如果一维坐标系的原点沿轴的正向移动距离 A（A > 0），那么转换公式为：

$$X_{new} = X_{old} - A$$

然而，在坐标系转换中，通常将偏移量视作校正值，符号与数学上相反，EPSG 自 1999 年起采用该协定至今。这样，原坐标值加上一个校正参数就得到新坐标值：

$$X_t = X_s + A$$

其中，Xs 和 Xt 分别为原坐标系和新坐标系的坐标值；A 为转换参数，通过该参数将坐标值从原坐标系转换到新坐标系。

3.1.1 垂向偏移量（EPSG 坐标运算方法 9616）

如果两坐标系的坐标轴向定义不一致，例如将原坐标系中的高度（向上为正），转换为新坐标系的深度（向下为正），或转换成不同的坐标单位，公式 Xt = Xs + A 需要调整为：

$$X_t = [(X_s * U_s) + (A * U_A)] * (m / U_t)$$

式中：Xt = 新坐标系的坐标值，

Xs = 原坐标系的坐标值，

A 为新坐标系的原点在原坐标系中的坐标值，

m 为单位方向因子（如果两坐标系轴向一致 m=1；如果两坐标系轴向不一致 m = -1），

Us、Ut 和 U_A 分别为原坐标、新坐标和偏移参数的坐标单位与米的比值。

3.2 三参数转换（EPSG 坐标运算方法 9603）

假设两椭球体的长、短轴相互平行，零经线为格林威治本初子午线，从原坐标系转换到新坐标系的三平移参数为 dX，dY，dZ，那么转换公式为：

$$X_t = X_s + dX$$
$$Y_t = Y_s + dY$$
$$Z_t = Z_s + dZ$$

实例：

本例结合了 2.1 中所述的大地坐标与地心坐标的转换方法。

已知位于北海的一个 WGS84 大地坐标点，由 GPS 卫星定位：

纬度 $j_s = 53°48'33.82''\mathrm{N}$

经度 $l_s = 2°07'46.38''\mathrm{E}$

椭球高 $h_s = 73.0m$

需要将其转换为 ED50 大地坐标，相应的椭球体为 International 1924。北海区从 WGS84 转换到 ED50 的转换三参数为：dX = +84.87m ，dY = +96.49m，dZ = +116.95m。

首先将 WGS84 大地坐标转换为地心直角坐标：

$$X_s = 3771793.97m$$
$$Y_s = 140253.34m$$
$$Z_s = 5124304.35m$$

根据上述地心坐标转换方法，得到 ED50 的地心直角坐标：

$$X_t = 3771793.97 + 84.87 = 3771878.84m$$
$$Y_t = 140253.34 + 96.49 = 140349.83m$$
$$Z_t = 5124304.35 + 116.95 = 5124421.30m$$

利用 2 中定义的反变换方法，得到 ED50 的大地坐标：

纬度$j_t = 53°48'36.565''\mathrm{N}$

经度$l_t = 2°07'51.477''\mathrm{E}$

椭球高$h_t = 28.02m$

其中椭球高从 International 1924 **椭球面起算，如果换算到海平面高程需要作大地水准面高度校正。**

3.3　简化莫洛金斯基（Molodenski）转换

莫洛金斯基（Molodenski**）推出的转换公式，可将上述三参数方法的计算步骤合而为一，公式的简化形式非常适合三参数坐标系转换：**

$$j_t = j_s + dj$$
$$l_t = l_s + dl$$
$$h_t = h_s + dh$$

式中：

$$dj'' = (-dX.\sin j.\cos l - dY.\sin j.\sin l + dZ.\cos j + [a.df + f.da].\sin 2j)/(r.\sin 1'')$$
$$dl'' = (-dX.\sin l + dY.\cos l)/(n.\cos j.\sin 1'')$$
$$dh = dX.\cos j.\cos l + dY.\cos j.\sin l + dZ.\sin j + (a.df + f.da).\sin^2 j - da$$

其中：dX，dY，dZ **为两椭球参心差值，也就是椭球体原点平移参数**

r **为原椭球体纬度**j **处的子午圈曲率半径**　$r = a(1-e^2)/(1-e^2\sin^2 j)^{3/2}$

n **为原椭球体纬度**j **处的卯酉圈曲率半径**　$n = a/(1-e^2\sin^2 j)^{1/2}$

da **为新椭球体与原椭球体的长半轴之差**　$da = a_t - a_s$

df **为新椭球体与原椭球体的扁率之差**　$df = f_t - f_s = 1/(1/f_t) - 1/(1/f_s)$

dj**和d**l**为**j**和**l **的偏差值，以弧度为单位。**

实例：

已知位于北海的一个 WGS84 **大地坐标点，由** GPS **卫星定位：**

纬度$j_s = 53°48'33.82''\mathrm{N}$

经度$l_s = 2°07'46.38''\mathrm{E}$

椭球高$h_s = 73.0m$

需要将其转换为 ED50 **大地坐标，相应的椭球体为** International 1924。

北海区从 WGS84 **转换到** ED50 **的转换三参数为：**

dX = +84.87m

dY = +96.49m

dZ = +116.95m

椭球参数为：

WGS 1984 a = 6378137.0 米 1/f = 298.2572236

International 1924 a = 6378388.0 米 1/f = 297.0

计算得到：

da = 6378137 - 6378388 = -251

df = 0.003352811 – 0.003367003 = -1.41927E-05

计算得到：

$$d\varphi = 2.545''$$

$$d\lambda = 5.097''$$

$$dh = -44.98m$$

计算得到 ED50（**基于** International 1924 **椭球体）的大地坐标值为：**

纬度 $\varphi_t = 53°48'36.565''\ N$

经度 $\lambda_t = 2°07'51.477''\ E$

椭球高 $h_t = 28.02m$

3.4 赫尔默特（Helmert）转换

从一个大地坐标系转换到另一个大地坐标系（俗称为基准面转换）一般需要经过三个环节：大地坐标到地心坐标 → 地心坐标到地心坐标 → 地心坐标到大地坐标。

其中的中间环节，地心坐标到地心坐标，通常又称为 7 **参数赫尔默特（Helmert）转换，将转换公式用** 7 **参数矩阵表示，即得到著名的布尔莎-沃尔夫（Bursa-Wolf）公式：**

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} = M * \begin{pmatrix} 1 & -R_Z & +R_Y \\ +R_Z & 1 & -R_X \\ -R_Y & +R_X & 1 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix}$$

式中，（Xs，Ys，Zs**）为原坐标系中的点坐标，（**Xt，Yt，Zt**）为新坐标系中的点坐标。**

转换参数的定义不唯一， 可引伸出不同的转换方法，其中“ 位置矢量转换 ”方法（EPSG **坐标运算方法 9606）在欧洲石油勘探行业中广泛采用，国际大地测量协会（IAG）也通过 ISO 19111 建议采用该方法的参数定义：**

（dX,dY,dZ）**：两坐标系的原点平移矢量（平移参数），原坐标系中的点位置矢量加上原点平移矢量即得到该点在新坐标系中的位置矢量。平移参数也就是原坐标系的原点在新坐标系中的坐标值。**

（Rx，Ry，Rz）**：位置矢量的旋转角（旋转参数）。参数符号约定如下：从直角坐标系原点，沿轴正向看，位置矢量绕轴顺时针旋转为正。从原坐标系转换到新坐标系，如果绕 Z 轴的旋转角度为正，那么转换后坐标点的经度将增大。公式中的角度单位，本文要求是弧度。**

M**：位置矢量的比例因子（尺度比参数），位置矢量从原坐标系转换到新坐标系的尺度伸缩量。**$M = (1 + dS*10^{-6})$**，其中** dS **为尺度校正量，以百万分之一计（**ppm**）。**

实例：

本例结合了 2.1 中所述的大地坐标与地心坐标的转换方法及位置矢量转换方法。

要求从 WGS72 转换到 WGS84，转换参数如下：

dX = 0.000 m

dY = 0.000 m

dZ = +4.5 m

Rx = 0.000 ″

RY = 0.000 ″

Rz = +0.554 ″

dS = +0.219 ppm

已知 WGS72 大地坐标：

纬度$j_S = 55°00'00"N$

经度$l_S = 4°00'00"E$

椭球高$h_S = 0m$

利用大地坐标到地心坐标的转换公式得到：

$$X_S = 3657660.66m$$
$$Y_S = 255768.55m$$
$$Z_S = 5201382.11m$$

利用 7 参数位置矢量转换方法得到：

$$X_T = 3657660.78m$$
$$Y_T = 255778.43m$$
$$Z_T = 5201387.75m$$

利用地心坐标到大地坐标的转换公式得到点在 WGS84 上的三维坐标值：

纬度$j_T = 55°00'00.090"N$

经度$l_T = 4°00'00.554"E$

椭球高$h_T = +3.22m$

位置矢量转换法虽然在欧洲石油勘探行业中普遍应用，但其符号约定并未得到全球的认同。美国石油勘探行业则采用另一种符号约定，其区别在于旋转参数的约定上，称作“坐标框架旋转”约定（EPSG 坐标运算方法 9607），转换公式为：

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} = M * \begin{pmatrix} 1 & +R_Z & -R_Y \\ -R_Z & 1 & +R_X \\ +R_Y & -R_X & 1 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix}$$

转换参数定义为：

（dX,dY,dZ）：两坐标系的原点平移矢量（平移参数），原坐标系中的点位置矢量加上原点平移矢量即得到该点在新坐标系中的位置矢量。平移参数也就是原坐标系的原点在新坐标系中的坐标值。

（Rx，RY，Rz）：坐标参考框架的旋转角（旋转参数）。参数符号约定如下：从直角坐标系原

点，沿轴正向看，坐标参考框架绕轴顺时针旋转为正。从原坐标系转换到新坐标系，如果绕 Z 轴的旋转角度为正，那么转换后坐标点的经度将变小。公式中的角度单位，本文要求是弧度。

M：位置矢量的比例因子（尺度比参数），位置矢量从原坐标系转换到新坐标系的尺度伸缩量。$M = (1 + dS*10^{-6})$，其中 dS 为尺度校正量，以百万分之一计（ppm）。

如果不考虑旋转因素，位置矢量法与坐标框架法是一致的。需要注意的是，同样的旋转变换，在第一种方法中转换参数为正，而在第二种方法中却是负的。所以，在基准面转换前，必须明确旋转参数的符号约定，可以说，参数的符号是与坐标系转换方法相关联的。

前面位置矢量法的例子同样可通过坐标框架法计算，只不过输入的转换参数略有差异：

dX = 0.000 m
dY = 0.000 m
dZ = +4.5 m
R_X = 0.000 ″
R_Y = 0.000 ″
R_Z = -0.554 ″
dS = +0.219 ppm

注意：与位置矢量法相比，只有旋转参数的符号变号；此外，国际大地测量协会（IAG）在 ISO 19111 标准中建议使用位置矢量法的符号约定。

3.5 莫洛金斯基-巴德卡斯（Molodenski-Badekas）转换

为了消除赫尔默特（Helmert）方法中平移与旋转参数之间的强相关性，引入了另一旋转中心点，也就是旋转中心由原来的地心坐标系原点，改为一个特定的位置，转换公式变为：

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} = M * \begin{pmatrix} 1 & +R_Z & -R_Y \\ -R_Z & 1 & +R_X \\ +R_Y & -R_X & 1 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} X_S - X_P \\ Y_S - Y_P \\ Z_S - Z_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix}$$

参数定义如下：

（dX,dY,dZ）：两坐标系的原点平移矢量（平移参数），原坐标系中的点位置矢量加上原点平移矢量即得到该点在新坐标系中的位置矢量。平移参数也就是原坐标系的原点在新坐标系中的坐标值。

（R_X，R_Y，R_Z）：坐标参考框架的旋转角（旋转参数）。参数符号约定如下：从直角坐标系原点，沿轴正向看，坐标参考框架绕轴顺时针旋转为正。从原坐标系转换到新坐标系，如果绕 Z 轴的旋转角度为正，那么转换后坐标点的经度将变小。公式中的角度单位，本文要求是弧度。

（X_P，Y_P，Z_P）：坐标参考框架的旋转中心点，在原直角坐标系中定义。

M：位置矢量的比例因子（尺度比参数），位置矢量从原坐标系转换到新坐标系的尺度伸缩

量。$M = (1 + dS*10^{-6})$，其中 dS 为尺度校正量，以百万分之一计（ppm）。

可逆性：

严格从数学意义上来说，莫洛金斯基-巴德卡斯（Molodenski-Badekas）方法是不可逆的，也就是，原则上同样的转换参数不能用于反变换，因为旋转的参照点是原坐标系中的点，而反变换要求将该旋转参照点视作新坐标系中的同位置点，这是不能成立的。然而，实际中如果点在两个坐标系中的位置差异很小，可以例外对待。一般的坐标矢量差在 $6*10^1$ 到 $6*10^2$ 米数量级，而椭球面或接近椭球面的旋转参考点到坐标原点的距离为 $6.3*10^6$ 米数量级，之间有 4～5 个数量级的差异，因此实际中可以认为莫洛金斯基-巴德卡斯方法是可逆的。不过注意，反变换时平移与旋转参数的符号必须变号，旋转参照点可以保持不变。

4．其它坐标系转换方法

ISO 19111 将坐标运算方法简单的分为坐标变换（不涉及基准面转换）与坐标系转换，这些方法的功能都是将坐标从一个坐标系转换到另一个坐标系，基准面转换与否则取决于原坐标系与新坐标系的基准面异同，不过实际中大部分都涉及基准面的转换。可是，有些坐标运算方法在理论上很难归入 ISO 19111 所述的转换或变换方法，EPSG 根据方法的数学特征，将它们划归为坐标系转换方法。

4.1　多项式转换方法

注意：本节中的数学符号 X、Y 仅表示坐标系中的坐标轴，它们与前面涉及的特定坐标系下的特定坐标轴的缩写无关。

4.1.1　一般多项式转换

多项式转换方法一般用于误差分布不均匀的坐标系转换，因为这些误差引起的失真可近视通过经、纬度或北、东向坐标的多项式函数模拟，多项式的阶次可按失真的程度而定，可以是 2 次、3 次或更高次的多项式。在坐标系转换中，由地图投影及基准面变换误差引起的失真也可以通过多项式逼近函数调整。

多项式函数本身具有适应各种变化的能力，因为不同的情况可通过不同的多项式逼近。最简单的多项式是一般多项式函数，但这类多项式可能产生数值不稳定问题，为此需要将原坐标系及新坐标系中的坐标值减小到“可控制”的数值，至多在-10～10 之间，这可通过坐标值归化实现，也就是，设定一个中间参照点，计算各点相对该参照点的坐标差值，然后再通过一个比例因子将该差值归化到期望的数值范围。

设定原坐标系的参照点（X_{S0}，Y_{S0}），新坐标系的参照点（X_{T0}，Y_{T0}），通常，这两个参照点不是同一个物理点，而是各自坐标系中的同坐标点，因为当两个参照点坐标相同时，公式中的相关参数就能互相消除，不过本节选择了坐标值不同的两个参照点。

两坐标系的参照点选定后，就可计算相对各自参照点的相对坐标值，分别为：

$$
\begin{matrix} X_S - X_{S0} \\ Y_S - Y_{S0} \end{matrix} \quad \text{和} \quad \begin{matrix} X_T - X_{T0} \\ Y_T - Y_{T0} \end{matrix}
$$

相对坐标值的单位应该与坐标系采用的单位一致，如果原坐标系或新坐标系的坐标用经纬度表示，则坐标单位可以是度、分、秒，不过度、分、秒在数学公式中不能直接参与运算。

然后通过一个比例因子，将相对坐标值调整到一个期望的数值范围，以减小多项式数值计算误差：

$$
\begin{aligned}
U &= m_S \cdot (X_S - X_{S0}) \\
V &= m_S \cdot (Y_S - Y_{S0})
\end{aligned}
$$

式中，X_S**，**Y_S **为原坐标系中的点坐标，**

X_{S0}**，**Y_{S0} **为原坐标系中的参照点坐标，**

m_S **为原坐标系中相对坐标值的比例因子。**

将归化后的相对坐标值 U、V **代入多项式转换公式，同时，为了控制系数** An、Bn **的数值范围，将计算结果** dX、dY **再乘上一个比例因子** m_T **为：**

$$
\begin{aligned}
m_T \cdot dX = {} & A_0 + A_1 \cdot U + A_2 \cdot V + A_3 \cdot U^2 + A_3 \cdot U \cdot V + A_5 \cdot V^2 \\
& + A_6 \cdot U^3 + A_7 \cdot U^2 \cdot V + A_8 \cdot U \cdot V^2 + A_9 \cdot V^3 \\
& + A_{10} \cdot U^4 + A_{11} \cdot U^3 \cdot V + A_{12} \cdot U^2 \cdot V^2 + A_{13} \cdot U \cdot V^3 + A_{14} \cdot V^4 \\
& + A_{15} \cdot U^5 + A_{16} \cdot U^4 \cdot V + A_{17} \cdot U^3 \cdot V^2 + A_{18} \cdot U^2 \cdot V^3 + A_{19} \cdot U \cdot V^4 + A_{20} \cdot V^5 \\
& + A_{21} \cdot U^6 + A_{22} \cdot U^5 \cdot V + A_{23} \cdot U^4 \cdot V^2 + A_{24} \cdot U^3 \cdot V^3 + A_{25} \cdot U^2 \cdot V^4 + A_{26} \cdot U \cdot V^5 + A_{27} \cdot V^6 \\
& + \ldots + A_{104} \cdot V^{13}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_T \cdot dY = {} & B_0 + B_1 \cdot U + B_2 \cdot V + B_3 \cdot U^2 + B_3 \cdot U \cdot V + B_5 \cdot V^2 \\
& + B_6 \cdot U^3 + B_7 \cdot U^2 \cdot V + B_8 \cdot U \cdot V^2 + B_9 \cdot V^3 \\
& + B_{10} \cdot U^4 + B_{11} \cdot U^3 \cdot V + B_{12} \cdot U^2 \cdot V^2 + B_{13} \cdot U \cdot V^3 + B_{14} \cdot V^4 \\
& + B_{15} \cdot U^5 + B_{16} \cdot U^4 \cdot V + B_{17} \cdot U^3 \cdot V^2 + B_{18} \cdot U^2 \cdot V^3 + B_{19} \cdot U \cdot V^4 + B_{20} \cdot V^5 \\
& + B_{21} \cdot U^6 + B_{22} \cdot U^5 \cdot V + B_{23} \cdot U^4 \cdot V^2 + B_{24} \cdot U^3 \cdot V^3 + B_{25} \cdot U^2 \cdot V^4 + B_{26} \cdot U \cdot V^5 + B_{27} \cdot V^6 \\
& + \ldots + B_{104} \cdot V^{13}
\end{aligned}
$$

由此计算得到 dX、dY **值，其数值单位与新坐标系采用的单位一致。**

在 EPSG **数据集中，多项式系数以** Aumvn **和** Bumvn **形式表示，其中** m **为** U **的幂次，**n **为** V **的幂次，例如，**A17 **表示为：**Au3v2。

于是，两坐标系之间的关系可表示为：

$$(X_T - X_{T0}) = (X_S - X_{S0}) + dX$$
$$(Y_T - Y_{T0}) = (Y_S - Y_{S0}) + dY$$

或

$$X_T = X_S - X_{S0} + X_{T0} + dX$$
$$Y_T = Y_S - Y_{S0} + Y_{T0} + dY$$

式中，X_T，Y_T **为新坐标系中的点坐标，**

X_S，Y_S **为原坐标系中的点坐标，**

X_{S0}，Y_{S0} **为原坐标系中的参照点坐标，**

X_{T0}，Y_{T0} **为新坐标系中的参照点坐标，**

dX、dY **为带比例因子多项式公式的计算结果。**

实例：6 次一般多项式（EPSG 坐标运算方法 9648）

要求将坐标系从 TM75 **转换到** ETRS89

原坐标系参照点 X0：$X_{S0} = \varphi_{S0} = 53°30'00.000''N = +53.5°$

原坐标系参照点 Y0：$Y_{S0} = \lambda_{S0} = 7°42'00.000''W = -7.7°$

新坐标系参照点 X0：$X_{T0} = \varphi_{T0} = 53°30'00.000''N = +53.5°$

新坐标系参照点 Y0：$Y_{T0} = \lambda_{T0} = 7°42'00.000''W = -7.7°$

原坐标系相对坐标值比例因子：$m_S = 0.1$

新坐标系相对坐标值比例因子：$m_T = 3600$

参数：

A0 = 0.763	A1 = -4.487	…	A24 = -265.898	…	A27 = 0
B0 = -2.810	B1 = -0.341	…	B24 = -853.950	…	B27 = 0

TM75 **经纬度为：**

纬度 $\varphi_{TM75} = X_S = 55°00'00''N = +55.000°$

经度 $\lambda_{TM75} = Y_S = 6°30'00''W = -6.500°$

$$X_S - X_{S0} = \varphi_{TM75} - \varphi_{S0} = 55.0 - 53.5 = 1.5°$$
$$Y_S - Y_{S0} = \lambda_{TM75} - \lambda_{S0} = -6.6 - (-7.7) = 1.2°$$

$$U = m_S \cdot (X_S - X_{S0}) = m_S \cdot (\varphi_{TM75} - \varphi_{S0}) = 0.1*(1.5) = 0.15$$
$$V = m_S \cdot (Y_S - Y_{S0}) = m_S \cdot (\lambda_{TM75} - \lambda_{S0}) = 0.1*(1.2) = 0.12$$

$$dX = (A_0 + A_1 \cdot U + \ldots + A_{24} \cdot U^3 \cdot V^3) / K_{TCD}$$
$$dX = \{0.763 + (-4.487*0.15) + \ldots + (-265.898*0.15^3*0.12^3)\}/3600 = 0.00003046°$$

$$dY = (B_0 + B_1 \cdot U + ... + B_{24} \cdot U^3 \cdot V^3) / K_{TCD}$$

$$dY = \{-2.81 + (-0.341 * 0.12) + ... + (-853.95 * 0.12^3 * 0.12^3)\} / 3600 = -0.00094799°$$

得：

纬度 $j_{ETRS89} = X_T = X_S + dX = 55.0 + 0.00003046 = 55°00'10.9656''\ N$

经度 $l_{ETRS89} = Y_T = Y_S + dY = -6.6 - 0.00094799 = 6°30'03.4128''\ W$

4.1.2 多项式转换方法的可逆性

多项式逼近方法严格从数学上来说是不可逆的，也就是同样的多项式系数不能直接用于反转换。

原则上，反转换可以有两个途径：

（1）采用与正转换不同的转换公式：同一类多项式，但不同的多项式系数。

（2）采用与正转换相同的转换公式：同一类多项式，同一套多项式系数，但系数符号需要变号，然后通过迭代得到符合要求的结果，迭代次数取决于你要求的精度（注意：只需要将多项式系数的符号变号，参照点及比例因子的符号不变！）。

对于第二种反转换途径，如果满足下列条件，不迭代也能直接得到满意的结果，这种情况下的多项式坐标转换方法 EPSG 称其为“n 次可逆多项式转换方法”：

多项式转换方法在下列条件下可逆：

（1）原坐标系与新坐标系的参照点坐标值相同；

（2）原坐标系与新坐标系的相对坐标值的单位相同；

（3）原坐标系与新坐标系的相对坐标值的比例因子相同；

（4）两坐标系中任意对应点的空间变化量 dX、dY 均足够小。

上列可逆性条件注释：

（1）反转换时，原坐标系与新坐标系换位了，结果原坐标系的参照点就变成了新坐标系的参照点。如果原坐标系与新坐标系的参照点坐标值与单位完全相同，那么采用同一套多项式系数进行反转换是可行的。也就是，$X_{SO} = X_{T0} = X_0$、$Y_{SO} = Y_{T0} = Y_0$。

（2）同上，相同的比例因子即要求：$m_S = m_T = m$。

（3）如果满足条件 1、2、3，并且两坐标系中任意对应点的 dX、dY 均足够小，那么反转换时就可以采用正转换多项式公式，只是需要颠倒多项式系数的符号，但参照点及比例因子的符号不变。反之，如果 dX、dY 太大，反转换就需要通过迭代来完成。因此，迭代与否取决于你要求的精度及 dX、dY 的空间变化量。

下面的反转换实例为：从 ED50 转换到 ED87，测区为北海，采用可逆多项式转换方法，原因如下：（1）原坐标系与新坐标系都为二维大地坐标系；（2）测区内 ED50 与 ED87 的坐标差值一般在 2 米左右（≈10^{-6} 度）；（3）两个坐标系的参照点均为 55°N，0°E；（4）将归化后的相对坐标值（相对参照点的相对坐标值，单位度）输入多项式函数，输出值（dX、dY）与输入值相比偏差在 10^{-6} 度数量级，由次可以认为多项式函数是可逆的。

多项式反转换误差的数量级和输出值与输入值的比率相同：

$$\frac{\text{输出误差}}{\text{输入误差}} \approx \frac{\text{输出值}}{\text{输入值}} (\approx 10^{-6})$$

只要输入值的数量级大于输出值，并且多项式系数的符号相反，那么该多项式转换公式就可认为是可逆的。

EPSG **将一般多项式转换方法分为“可逆”与“不可逆”两类，它们的区别在于采用的多项式系数，如正、反转换采用同一套系数表示该转换方法可逆，反之不可逆。至于迭代反转换法，使用时可视作隐含正转换方法。**

实例：4 次可逆多项式（EPSG 坐标运算方法 9651）

（1）将坐标系从 ED50 转换到 ED87

参照点：

$$X_0 = j_0 = 55°00'00.000''N = +55°$$
$$Y_0 = l_0 = 0°00'00.000''E = +0°$$

相对坐标值比例因子：m = 1.0

参数：

A0 = -5.56098E-06	A1 = -1.55391E-06	···	A14 = -4.01383E-09
B0 = +1.48944E-05	B1 = +2.68191E-05	···	B14 = +7.62236E-09

ED50 **经纬度为：**

$$\text{纬度}\, j_{ED50} = X_S = 52°30'30''N = +52.508333333°$$
$$\text{经度}\, l_{ED50} = Y_S = 2°E = +2°$$

$$U = m\cdot(X_S - X_0) = m\cdot(j_{ED50} - j_0) = 1.0*(52.508333333 - 55.0) = -2.491666667°$$
$$V = m\cdot(Y_S - Y_0) = m\cdot(l_{ED50} - l_0) = 1.0*(2.0 - 0.0) = 2°$$

$$dX = (A_0 + A_1\cdot U + ... + A_{14}\cdot V^4)/K_{CD}$$
$$= [-5.56098E-06 + (-1.55391E-06 * -2.491666667) + ... + (-4.01383E-09*2.0\wedge 4)]/1.0$$
$$= -3.12958E-06°$$

$$dY = (B_0 + B_1\cdot U + ... + B_{14}\cdot V^4)/K_{CD}$$
$$= [+1.48944E-05 + (2.68191E-05 * -2.491666667) + ... + (7.62236E-09*2.0\wedge 4)]/1.0$$
$$= +9.80126E-06°$$

得：

$$\text{纬度}\, j_{ED87} = X_T = X_S + dX = 52.508333333 - 3.12958E-06 = 52°30'29.9887''N$$
$$\text{经度}\, l_{ED87} = Y_T = Y_S + dY = 2°00'00.0353''E$$

（2）将坐标系从 ED87 转换到 ED50

采用（1）的反转换方法，同样的 4 次多项式，只是将系数 A0～A14，B0～B14 符号变号，参照点与比例因子符号不变：

参照点：

$$X_0 = j_0 = 55°00'00.000''N = +55°$$
$$Y_0 = l_0 = 0°00'00.000''E = +0°$$

相对坐标值比例因子：m = 1.0

参数：

A0 = +5.56098E-06	A1 = +1.55391E-06	…	A14 = +4.01383E-09
B0 = -1.48944E-05	B1 = -2.68191E-05	…	B14 = -7.62236E-09

ED50 **经纬度为：**

$$\text{纬度}\ j_{ED87} = X_S = 52°30'29.9887''N = +52.5083301944°$$
$$\text{经度}\ l_{ED87} = Y_S = 2°00'00.0353''E = +2.0000098055°$$

$$U = 1.0*(52.5083301944 - 55.0) = -2.4916698056°$$
$$V = 1.0*(2.0000098055 - 0.0) = 2.0000098055°$$

$$dX = (A_0 + A_1 \cdot U + ... + A_{14} \cdot V^4) / K_{CD}$$
$$= [+5.56098E-06 + (1.55391E-06 * -2.4916698056) + ... + (4.01383E-09 * 2.0000098055 \wedge 4)]/1.0$$
$$= 3.12957E-06°$$

$$dY = (B_0 + B_1 \cdot U + ... + B_{14} \cdot V^4) / K_{CD}$$
$$= [-1.48944E-05 + (-2.68191E-05 * -2.4916698056) + ... + (-7.62236E-09 * 2.0000098055 \wedge 4)]/$$
$$= -9.80124E-06°$$

得：

$$\text{纬度}\ j_{ED50} = X_T = X_S + dX = 52.5083301944 + 3.12957E-06 = 52°30'30.000''N$$
$$\text{经度}\ l_{ED50} = Y_T = Y_S + dY = 2°00'00.000''E$$

4.1.3 复数多项式转换

两个投影坐标系之间的关系如果用复数多项式逼近，将使回归公式由繁变简，因为系数“A”与“B”，及“U”与“V”是相互独立的，如采用它们的复数多项式公式能减少系数的个数。

比利时采用的 3 次复数多项式：

$$m_T\cdot(dX+i\cdot dY)=(A_1+i\cdot A_2)\cdot(U+i\cdot V)+(A_3+i\cdot A_4)\cdot(U+i\cdot V)^2$$
$$+(A_5+i\cdot A_6)\cdot(U+i\cdot V)^3+(A_7+i\cdot A_8)\cdot(U+i\cdot V)^4$$

式中：

$$U=m_S\cdot(X_S-X_{S0})$$
$$V=m_S\cdot(Y_S-Y_{S0})$$

m_S、m_T分别为原坐标系与新坐标系中相对坐标值的比例因子。

荷兰采用的 4 次复数多项式，用于 Amersfoort / RD 和 ED50 / UTM 之间的坐标转换，其矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} m_T\cdot dX \\ m_T\cdot dY \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} +A_1 & -A_2 & +A_3 & -A_4 & +A_5 & -A_6 & +A_7 & -A_8 \\ +A_2 & +A_1 & +A_4 & +A_3 & +A_6 & +A_5 & +A_8 & +A_7 \end{bmatrix}*\begin{bmatrix} U \\ V \\ U^2-V^2 \\ 2UV \\ U^3-3UV^2 \\ 3U^2V-V^3 \\ U^4-6U^2V^2+V^4 \\ 4U^3V-4UV^3 \end{bmatrix}$$

然后得：

$$X_T=X_S-X_{S0}+X_{T0}+dX$$
$$Y_T=Y_S-Y_{S0}+Y_{T0}+dY$$

式中：

X_T，Y_T为新坐标系中的点坐标，
X_S，Y_S为原坐标系中的点坐标，
X_{S0}，Y_{S0}为原坐标系中的参照点坐标，
X_{T0}，Y_{T0}为新坐标系中的参照点坐标。

注意上面公式中没有出现 0 次系数 A0 与 B0，实际上已包含在相对参照点的坐标差值内。

公式中的复数多项式系数是不可逆的，反转换需要采用另一套转换系数。

实例：4 次复数多项式（EPSG 坐标运算方法 9653）

将坐标系从“ Amersfoort / RD New **”转换到“** ED50 / UTM zone 31N **”**

参数名	符 号	参数值	单 位
原坐标系参照点	X_{S0}	155000.000	米
	Y_{S0}	463000.000	米
新坐标系参照点	X_{T0}	663395.607	米
	Y_{T0}	5781194.380	米
原坐标系比例因子	m_S	10^{-5}	
新坐标系比例因子	m_T	1.0	
A1	A1	-51.681	系数
A2	A2	+3290.525	系数
A3	A3	+20.172	系数
A4	A4	+1.133	系数
A5	A5	+2.075	系数
A6	A6	+0.251	系数
A7	A7	+0.075	系数
A8	A8	-0.012	系数

输入点坐标：

东：$X_{Amersfoort / RD} = X_S = 200000.00$ m

北：$Y_{Amersfoort / RD} = Y_S = 500000.00$ m

$$U = m_S \cdot (X_S - X_{S0}) = (200000 - 155000) \cdot 10^{-5} = 0.45$$

$$V = m_S \cdot (Y_S - Y_{S0}) = (500000 - 463000) \cdot 10^{-5} = 0.37$$

dX = （-1240.050） / 1.0

dY = （1468.748） / 1.0

计算得：

东：$X_{ED50 / UTM\ 31} = X_T = X_S - X_{S0} + X_{T0} + dX$

= 200000 – 155000 + 663395.607 + （– 1240.050）

= 707155.557 m

北：$Y_{ED50 / UTM\ 31} = Y_T = Y_S - Y_{S0} + Y_{T0} + dY$

= 500000 – 463000 + 5781194.380 + 1468.748

= 5819663.128 m

4.1.4 西班牙的多项式转换方法（EPSG 坐标运算方法 9617）

西班牙最早的大地坐标系为 Madrid 1870（马德里 1870 基准面），参考椭球体为 Struve 1860，起始经线为马德里（Madrid）子午线。El Servicio Geografico del Ejército 给出了三对二元多项式经验公式用于 Madrid 1870 与 ED50（欧洲 1950 基准面）的坐标系转换，其中的多项式系数可用于 Madrid 1870 到 ED50 的坐标系转换。三对公式分别适用于：西班牙全境；西班牙北部；及西班牙南部。

多项式为：

$$d\varphi(\text{弧度秒}) = A_0 + (A_1 * \varphi_S) + (A_2 * \lambda_S) + (A_3 * H_S)$$
$$d\lambda(\text{弧度秒}) = B_{00} + B_0 + (B_1 * \varphi_S) + (B_2 * \lambda_S) + (B_3 * H_S)$$

式中，φ_s、λ_s 对应 Madrid 1870 基准面的纬度与经度，单位为十进制度；

Hs 为重力高程，单位米；

B_{00} 为马德里（Madrid）子午线相对格林威治（Greenwich）子午线的经差，单位秒，B_{00} 使转换后的坐标起始经线为格林威治子午线。

由此可得到：

$$\varphi_{ED50} = \varphi_{M1870(M)} + d\varphi$$
$$\lambda_{ED50} = \lambda_{M1870(M)} + d\lambda$$

实例：

已知 Madrid 1870 二维大地坐标：

$$\text{纬度}\varphi_S = 42°38'52.77''N = +42.647992°$$
$$\text{经度}\lambda_S = 3°39'34.57''E(Madrid) = +3.659603°(Madrid)$$

重力高程 H_S = 0 m

西班牙北部的转换系数为：

A0 = 11.328779	B00 = -13276.58
A1 = -0.1674	B0 = 2.5079425
A2 = -0.03852	B1 = 0.8352
A3 = 0.0000379	B2 = -0.00864
	B3 = -0.0000038

计算结果为：

$$d\varphi = +4.05''$$
$$\varphi_{ED50} = 42°38'52.77''N + 4.05'' = 42°38'56.82''N$$
$$d\lambda = -13270.54'' = -3°41'10.54''$$
$$\lambda_{ED50} = 3°39'34.57''E - 3°41'10.54'' = 0°01'35.97''(Greenwich)$$

4.2　各种线性转换方法

对于非直角坐标且坐标轴数值单位可能不同的坐标系，平面仿射变换可用来将其转换到等量坐标系（两轴正交且数值单位等比）。这类转换涉及坐标原点、数轴方向与数值单位的变换，EPSG 划分出四种方法实现该坐标变换，一种通过仿射代数变换实现；另三种通过仿射几何变换实现，分别为：一般的仿射几何变换、直角坐标系条件下的简化特例、及称作相似变换的进一步简化特例。

4.2.1　仿射分量变换（EPSG 坐标运算方法 9624）

仿射变换的分量变换公式在数学与大地测量文献上很常见，分量变换算法经常用于数字化地图的几何校正，该算法嵌入在 CAD 及 GIS 软件中，称作“ rubber sheeting ”（弹性伸缩），不过仿射变换的这类应用与坐标系转换无关。

变换公式的矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \end{bmatrix}$$

用代数式表示为：

$$X_T = A_0 + A_1 \cdot X_S + A_2 \cdot Y_S$$
$$Y_T = B_0 + B_1 \cdot X_S + B_2 \cdot Y_S$$

式中：X_T、Y_T 为为新坐标系中 P 点的坐标；
　　　X_S、Y_S 为为原坐标系中 P 点的坐标。

仿射分量变换公式类似于一般多项式转换公式（4.1），仿射分量变换公式可以人为地视作一次多项式转换公式，只是未作相对参照点的坐标值归化而已。

可逆性

仿射分量变换公式中的系数不能用于反变换，也就是反变换时需要采用另一套系数，反变换系数用带“ ' ”的符号表示：

$$D = A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1$$
$$A_0' = (A_2 \cdot B_0 - B_2 \cdot A_0) / D$$
$$B_0' = (B_1 \cdot A_0 - A_1 \cdot B_0) / D$$
$$A_1' = +B_2 / D$$
$$A_2' = -A_2 / D$$
$$B_1' = -B_1 / D$$
$$B_2' = +A_1 / D$$

4.2.2　一般仿射几何变换（EPSG 坐标运算方法 9623）

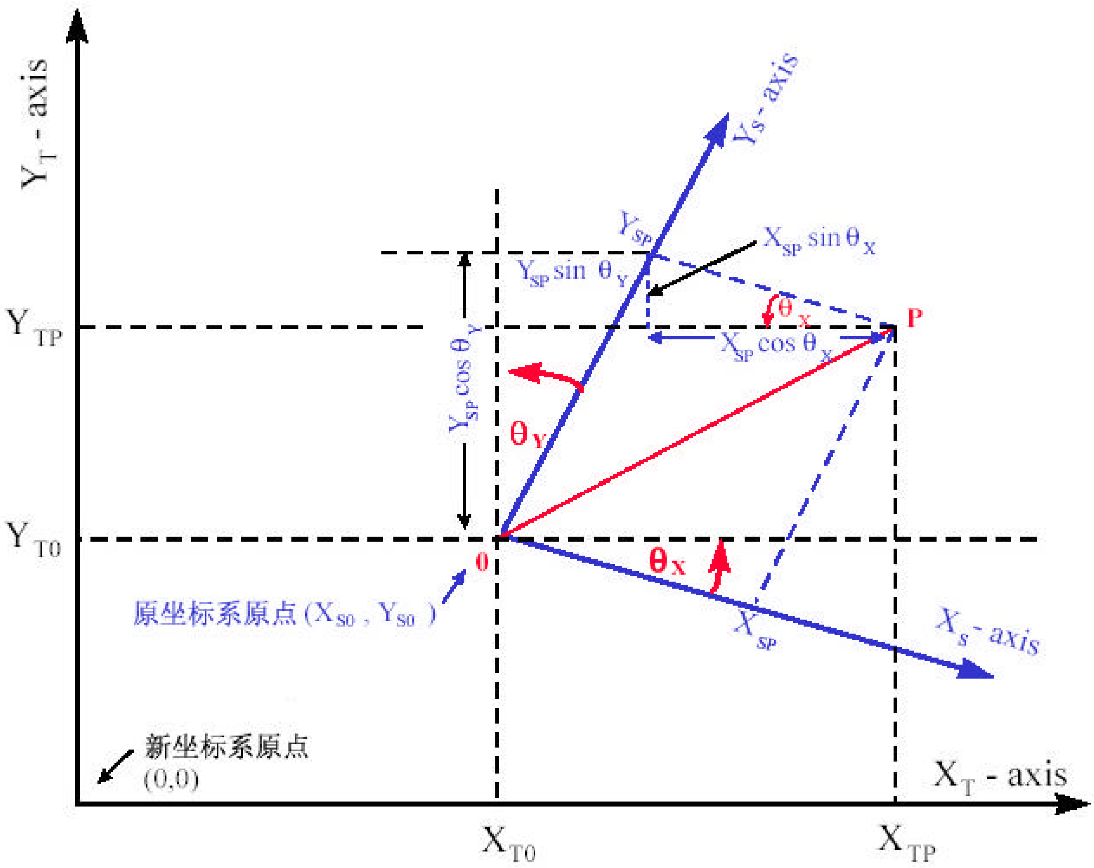

图　9　仿射几何变换示意图

（注：为了避免图面混乱，图中没有标示 Xs 与 Ys 的比例参数）

从上图可见：

$$X_{TP} = X_{T0} + Y_{SP} \cdot \sin q_Y + X_{SP} \cdot \cos q_X$$

$$Y_{TP} = Y_{T0} + Y_{SP} \cdot \cos q_Y - X_{SP} \cdot \sin q_X$$

含比例因子的变换公式

如果两坐标系变换涉及比例伸缩，上面的公式就会复杂一些。

这类情况在工程坐标系到投影坐标系的转换中经常遇到，二维地震格网就是工程坐标系的一个实例，该坐标系两轴的数值单位往往不同，为此，欲转换到投影坐标系，就涉及比例因子 dS_X 与 dS_Y。

名义上，投影坐标系单位为大家熟知的度量单位，如：米；而实际上，由于投影存在变形，投影后只在某个方向或曲线上能保真。因此严格来说，坐标单位仅在未变形线上是合理的，其它位置经投影变换后都存在比例失真。对于等角地图投影，任意点的投影变形都可以用该点的比例因子“ k ”表示。需要注意的是，比例因子“ k ”与投影原点的比例因子“ k_0 ”是两回事。对于非等角地图投影，投影比例失真与方位有关，本文从略。

对大面积覆盖区而言，测区中心点是计算比例因子“k”的上选，不过实际中，往往选择原坐标系（工程坐标系）的原点作为比例因子“k”的计算点。

在一般仿射几何变换公式中加入比例因子，并去掉 X_{TP}、Y_{TP}、X_{SP}、Y_{SP} 中的下标 P，调整项的前后位置后，得到一般仿射几何变换公式为：

$$X_T = X_{T0} + X_S \cdot k \cdot dS_X \cdot \cos q_X + Y_S \cdot k \cdot dS_Y \cdot \sin q_Y$$
$$Y_T = Y_{T0} - X_S \cdot k \cdot dS_X \cdot \sin q_X + Y_S \cdot k \cdot dS_Y \cdot \cos q_Y$$

其矩阵表达式为：

$$\begin{pmatrix} X_T \\ Y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{T0} \\ Y_{T0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos q_X & \sin q_Y \\ -\sin q_X & \cos q_Y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} k \cdot dS_X & 0 \\ 0 & k \cdot dS_Y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \end{pmatrix}$$

式中：X_{TO}、Y_{TO} 为原坐标系的原点在新坐标系中的坐标值；

dS_X、dS_Y 为原坐标系两坐标轴的单位长度，以新坐标系对应轴的长度单位表示；

k 为新坐标系选定参照点的比例因子；

θ_X、θ_Y 为原坐标系两坐标轴旋转到与新坐标系对应坐标轴重合需要转动的角度，逆时针旋转为正。

与（4.2.1）的仿射分量变换公式对照，仿射坐标变换的代数与几何公式的对应关系如下：

$$A_0 = X_{T0}$$
$$A_1 = k \cdot dS_X * \cos q_X$$
$$A_2 = k \cdot dS_Y * \sin q_Y$$
$$B_0 = Y_{T0}$$
$$B_1 = -k \cdot dS_X * \sin q_X$$
$$B_2 = k \cdot dS_Y * \cos q_Y$$

可逆性

仿射变换公式中的系数不能用于反变换，解决途径有二：（1）采用正变换公式，但其中的系数替换为反变换系数；（2）采用不同的变换公式（如下），但仍沿用正变换系数。

$$\begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \end{pmatrix} = \frac{1}{k \cdot D} * \begin{pmatrix} 1/dS_X & 0 \\ 0 & 1/dS_Y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos q_Y & -\sin q_Y \\ \sin q_X & \cos q_X \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_T - X_{T0} \\ Y_T - Y_{T0} \end{pmatrix}$$

式中：$D = \cos(q_X - q_Y)$

其代数表达式为：

$$X_S = [(X_T - X_{T0}) \cdot \cos q_Y - (Y_T - Y_{T0}) \cdot \sin q_Y] / [k \cdot dS_X \cdot \cos(q_X - q_Y)]$$
$$Y_S = [(X_T - X_{T0}) \cdot \sin q_X + (Y_T - Y_{T0}) \cdot \cos q_X] / [k \cdot dS_Y \cdot \cos(q_X - q_Y)]$$

4.2.3　正交仿射几何变换（EPSG坐标运算方法9622）

如果原坐标系恰巧为直角坐标系，也就是从原坐标系转换到新坐标系两坐标轴的旋转角度相等，$\theta_X = \theta_Y = \theta$。这样，一般仿射几何变换公式就可简化为：

矩阵表达式：

$$\begin{pmatrix} X_T \\ Y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{T0} \\ Y_{T0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} k \cdot dS_X & 0 \\ 0 & k \cdot dS_Y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \end{pmatrix}$$

其代数表达式：

$$X_T = X_{T0} + X_S \cdot k \cdot dS_X \cdot \cos q + Y_S \cdot k \cdot dS_Y \cdot \sin q$$
$$Y_T = Y_{T0} - X_S \cdot k \cdot dS_X \cdot \sin q + Y_S \cdot k \cdot dS_Y \cdot \cos q$$

式中：

X_{TO}、Y_{TO} 为原坐标系的原点在新坐标系中的坐标值；

dS_X、dS_Y 为原坐标系两坐标轴的单位长度，以新坐标系对应轴的长度单位表示；

k　新坐标系选定参照点的比例因子；

θ　定义为原坐标系两坐标轴旋转到与新坐标系对应坐标轴重合需要转动的角度，逆时针旋转为正；

θ　也可以定义为原坐标系 Y 轴相对新坐标系 Y 轴的方位角，顺时针旋转为正。

反变换公式可同样用θ代替θ_X 与θ_Y简化。

实例见下节。

4.2.4　相似变换（EPSG 坐标运算方法 9621）

如果原坐标系纵横比例尺恰巧也一致，也就是从原坐标系转换到新坐标系两坐标轴的比例因子相等，$dS_X = dS_Y = dS$。这样，一般正交仿射几何变换公式就可进一步简化为相似变换公式。

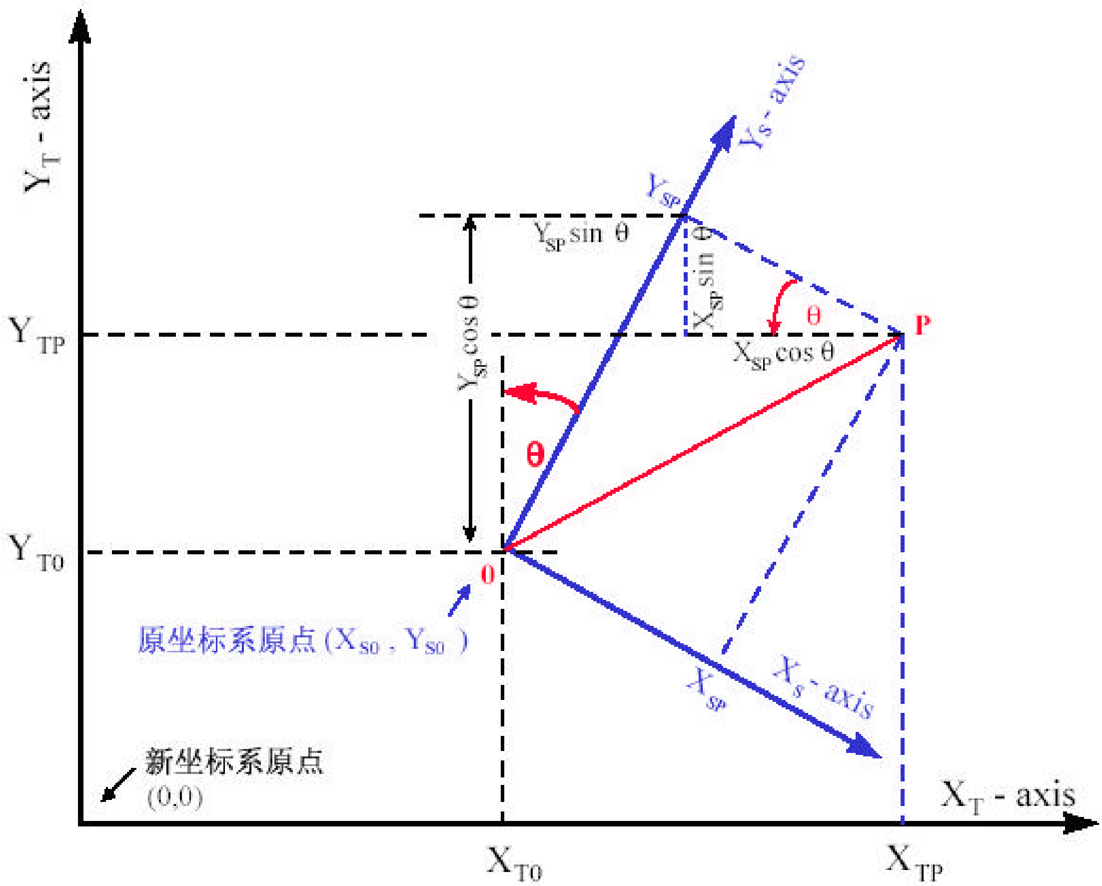

图 10　相似变换示意图

相似变换的代数表达式为：

$$X_{TP} = X_{T0} + Y_{SP} \cdot \sin q + X_{SP} \cdot \cos q$$
$$Y_{TP} = Y_{T0} + Y_{SP} \cdot \cos q - X_{SP} \cdot \sin q$$

去掉 X_{TP}、Y_{TP}、X_{SP}、Y_{SP} 中的下标 P，调整项的前后位置后，得代数表达式为：

$$X_T = X_{T0} + X_S \cdot dS \cdot \cos q + Y_S \cdot dS \cdot \sin q$$
$$Y_T = Y_{T0} - X_S \cdot dS \cdot \sin q + Y_S \cdot dS \cdot \cos q$$

或用矩阵表示为：

$$\begin{pmatrix} X_T \\ Y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{T0} \\ Y_{T0} \end{pmatrix} + (1 + dS) * \begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \end{pmatrix}$$

式中：X_{TO}、Y_{TO} 为原坐标系的原点在新坐标系中的坐标值；

　　　dS　为原坐标系一个单位长度，以新坐标系的长度单位表示；

θ 定义为原坐标系两坐标轴旋转到与新坐标系对应坐标轴重合需要转动的角度，逆时针旋转为正；

θ 也可以定义为原坐标系 Y 轴相对新坐标系 Y 轴的方位角，顺时针旋转为正。

相似变换可以描述为 A1 = B2 及 A2 = -B1 条件下的仿射分量变换。

可逆性

欲使相似变换系数可逆，两坐标系的比例值之差必须足够小（百万分之一数量级），此时 dS 可近似为两坐标系度量单位比值与单位 1 的偏差，这样反变换中的比例校正因子 1/（1+dS）≈（1-dS）。这类情况下的反变换就可视作同比例、同旋转角的正变换，因此将正变换系数符号变号后即可用于反变换，其中旋转角+θ需要改为-θ。不过反变换中的平移参数 X_{TO}′、Y_{TO}′值是与正变换完全不同的，从这点来说，实际中相似变换公式是不可逆的。

何时使用相似变换

当原坐标系及新坐标系满足下列条件时方可采用相似变换：

（1）都为直角坐标系；

（2）纵横比例尺都相同；

（3）度量单位都相同；

如果都为直角坐标系，但是纵横比例尺及度量单位存在偏差，那么应该选用仿射正交变换，而不是相似变换。地震格网往往是其中一例。

如果既不是直角坐标系，纵横比例尺与度量单位也不一致，那就应该选择代数或几何形式的一般仿射变换。

实例：

（1）相似变换方法

原坐标系：Astra Minas Grid（工程坐标系）

新坐标系：Campo Inchauspe / Argentina 2（投影坐标系）

Astra Minas Grid 坐标轴：

X：北向为正

Y：西向为正

Campo Inchauspe / Argentina 2 坐标轴：

X：北向为正

Y：东向为正

要求 Astra Minas Grid **的** X、Y **图转换到** Campo Inchauspe / Argentina 2 Y、X **图，有对应关系：**

X_S = Astra Minas X
Y_S = Astra Minas Y
X_T = Campo Inchauspe / Argentina 2 Y
Y_T = Campo Inchauspe / Argentina 2 X

相似变换参数：

X_{T0} = 2610200.48 m
Y_{T0} = 4905282.73 m
θ = 271°05′30″
k = 0 **因而** （1 + k）= 1.0

Astra Minas **坐标点：**X（**北**）= 10000 m ，Y（**西**）= 50000 m
X_S = Astra Minas X = 10000
Y_S = Astra Minas Y = 50000

高斯-克吕格 2 **带东**（Y）$= X_T = X_{T0} + X_S \cdot dS \cdot \cos q + Y_S \cdot dS \cdot \sin q$

= 2610200.48 +（50000*1.0*cos（271.0916667°））+（10000*1.0*sin（271.0916667°））
= 2601154.90 m

高斯-克吕格 2 **带北**（X）$= Y_T = Y_{T0} - X_S \cdot dS \cdot \sin q + Y_S \cdot dS \cdot \cos q$

= 4905282.73 -（50000*1.0*sin（271.0916667°））+（10000*1.0*cos（271.0916667°））
= 4955464.17 m

（2）正交仿射几何变换方法

原格网坐标系：3 **维地震格网，两轴正交，**I **轴单位为** 25 **米，**I **轴单位为** 12.5 **米**
新投影坐标系：WGS84 /UTM Zone 31N
格网原点 E = 456781.0，N = 5836723.0
投影坐标系中格网原点的比例因子为 0.99984
格网坐标轴 I **与** J **的方位角分别为** 110° **与** 20°**，因此如旋转到与投影坐标轴（正东、正北）重合，旋转角为**+20°**。**

因此有：X_{T0} = 456781.0 m
Y_{T0} = 5836723.0 m
dS_X = 25
dS_Y = 12.5
k = 0.99984
θ = +20°

对格网坐标点：I= 300 **，**J = 247**，计算得：**

$$X_T = \text{东} = X_{T0} + X_S \cdot k \cdot dS_X \cdot \cos q + Y_S \cdot k \cdot dS_Y \cdot \sin q = 464855.62m$$

$$Y_T = \text{北} = Y_{T0} - X_S \cdot k \cdot dS_X \cdot \sin q + Y_S \cdot k \cdot dS_Y \cdot \cos q = 5837055.90m$$

该点的反变换结果为：

$$X_S = [(X_T - X_{T0}) \cdot \cos q_Y) - (Y_T - Y_{T0}) \cdot \sin q_Y)]/[k \cdot dS_X \cdot \cos(q_X - q_Y)] = 230\text{格网单位}$$

$$Y_S = [(X_T - X_{T0}) \cdot \sin q_X) + (Y_T - Y_{T0}) \cdot \cos q_X)]/[k \cdot dS_X \cdot \cos(q_X - q_Y)] = 162\text{格网单位}$$

EPSG 1995-2004